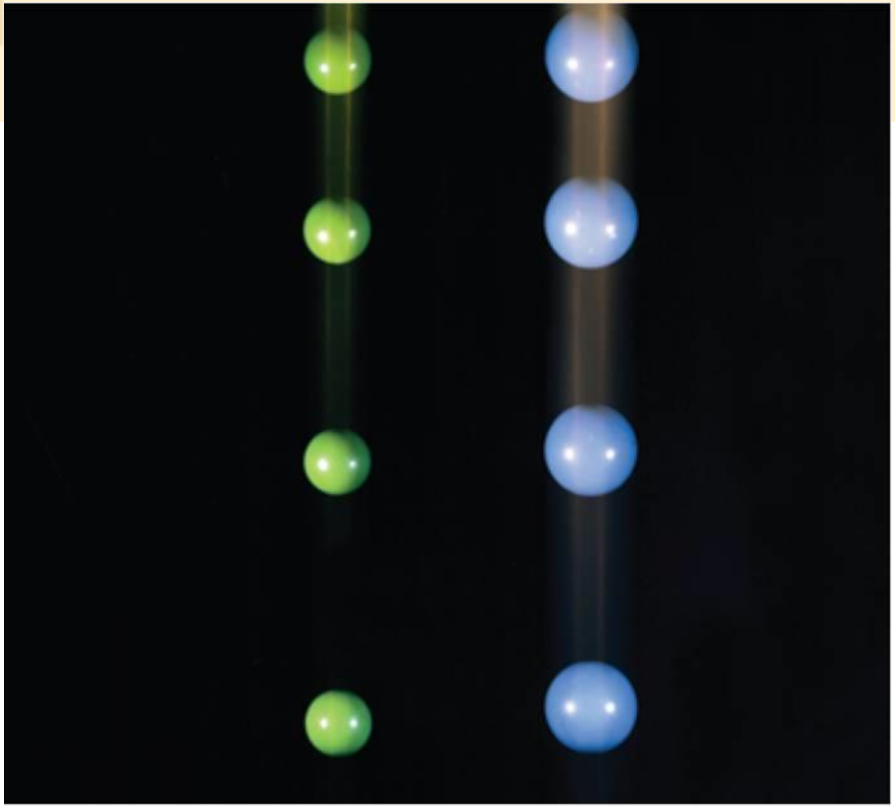
2

極限 (limits) 與 導數 (derivatives)



2.4 極限的精確定義

極限的精確定義

在之前我們對極限的定義使用了很多直覺上的語句，例如 x 很靠近 2 ， f(x) 可以任意靠近 L 等等模糊的敘述。

為了能夠實際的描述靠近、趨近，並且確實地以數學語言證明類似下列的極限

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000} \right) = 0.0001 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

我們有必要使用精確一點的說法來定義何謂極限。

極限的精確定義

為了瞭解我們為何需要精確的定義，這裡舉個例子。我們考慮下列的函數：

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{if } x \neq 3 \\ 6 & \text{if } x = 3 \end{cases}$$

直覺上在 x 靠近 3 但不等於 3 時， f(x) 的值會靠近 5 ，也就是 $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ 。

為了瞭解 f(x) 的變化，我們可能想問：

在 x 有多靠近 3 的情況之下， f(x) 跟 5 之間的差距可以小於 0.1 ？

極限的精確定義

我們知道 x 跟 3 之間的距離就是取差的絕對值 $|x - 3|$ ，而同樣的， $f(x)$ 跟 5 的距離為 $|f(x) - 5|$ 。

因此我們的問題變成，如何取一個 δ 值，使得

當 $|x - 3| < \delta$ ，但 $x \neq 3$ 時，滿足 $|f(x) - 5| < 0.1$ 。

另外我們其實也可以寫成 $0 < |x - 3| < \delta$ ，如此便可以保證 x 不為 3 。換句話說，如何取一個 δ 值，使得

當 $0 < |x - 3| < \delta$ 時，滿足 $|f(x) - 5| < 0.1$ 。

極限的精確定義

注意到，若 $0 < |x - 3| < (0.1)/2 = 0.05$ ，則

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6|$$

$$= 2|x - 3| < 2(0.05) = 0.1$$

也就是說，只要 $0 < |x - 3| < 0.05$ ，便有 $|f(x) - 5| < 0.1$

所以我們的答案就是：

給定 $\delta = 0.05$ ，只要 x 在距離 3 的 0.05 單位範圍之內，就能夠保證 f(x) 跟 5 的差距在 0.1 之間。

極限的精確定義

那如果我們將差距的範圍從 0.1 縮小至 0.01 呢？

利用同樣的方法，我們可以計算得只要當 x 與 3 的差距在 0.01/2 = 0.005 以內，則有 $|f(x) - 5| < 0.01$ 。

更近一步，還有

$$|f(x) - 5| < 0.001 \text{ ，當 } 0 < |x - 3| < 0.0005 \text{ 。}$$

這裡我們討論的差距 0.1, 0.01, 0.001 ，稱之為**容錯 (error tolerance)** 。

極限的精確定義

為了說明 x 趨近 3 時， f(x) 的極限為 5 。我們目標想證明得靠近程度當然不僅止於前面的三個容錯尺度，而是要對於任意的正數，都要能決定一個在 3 附近的範圍，使得 f(x) 跟 5 的差距在這個正數之內。

然而事實上，對任意正數我們真的都可以做到這樣：

令 ε (希臘字母, 讀作 epsilon) 為一任意正數，則我們可以如同前面一樣取到一個 δ = ε/2，使得

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \qquad \text{當 } 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \quad 。$$

極限的精確定義

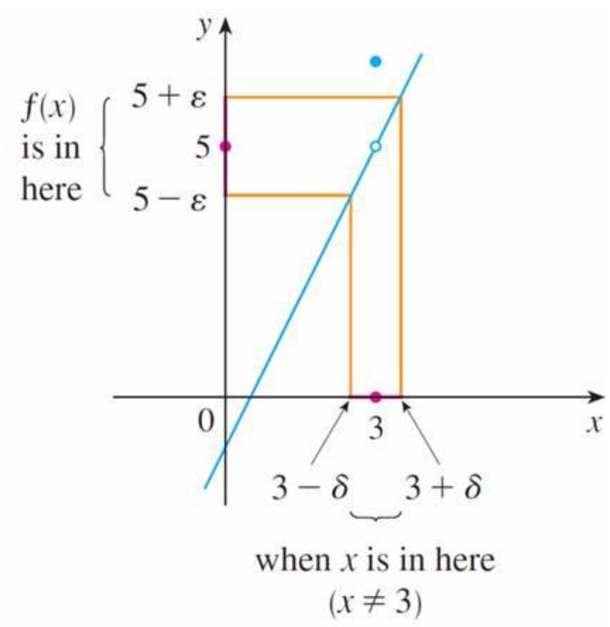
也就是說，我們可以很精確的說，只要 x 夠靠近 3 ，則 f(x) 可以任意靠近 5 ，因為不管我們設定多小的誤差 ε ，都能取一個範圍 $\delta = \varepsilon/2$ ，使得 x 在 3 附近 δ 範圍內，但 x 不為 3 之時，都能保證 f(x) 跟 5 的差距在誤差 ε 之內。

注意到前面的式子我們可以改寫成：

當 $3 - \delta < x < 3 + \delta \ (x \neq 3)$ ，

則有 $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$ 。

如右圖所刻劃。



圖一

極限的精確定義

以下我們就依照這個邏輯給出極限的精確定義：

[定義]

假設 $f(x)$ 在 a 附近的開區間範圍(但可能不包括 a)都有定義，我們說 $f(x)$ 在 x 趨近 a 時的極限值為 L ，表示：

給定任意正數 ε ，存在正數 δ 使得，當 $0 < |x-a| < \delta$ 時，誤差 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 。

符號寫作 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 。

極限的精確定義

我們再仔細地說一次：

這個極限

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

表示 f(x) 跟 L 的距離可以任意地小，**只要我們可以控制 x 到 a 的距離足夠小（但 x ≠ a）**。

極限的精確定義

在定義中，我們也可以把對距離的控制 $0 < |x - a| < \delta$ 改寫成區間的形式：

注意到誤差的不等式 $|x - a| < \delta$ 等價於 $-\delta < x - a < \delta$ 這表示 x 會落在這個區間 $a - \delta < x < a + \delta$。

而 $0 < |x - a|$ 表示 $x \neq a$。

極限的精確定義

同樣，誤差夠靠近 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 等價於 f(x) 落在這個 ε 區間

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

因此我們可以改寫定義如下：

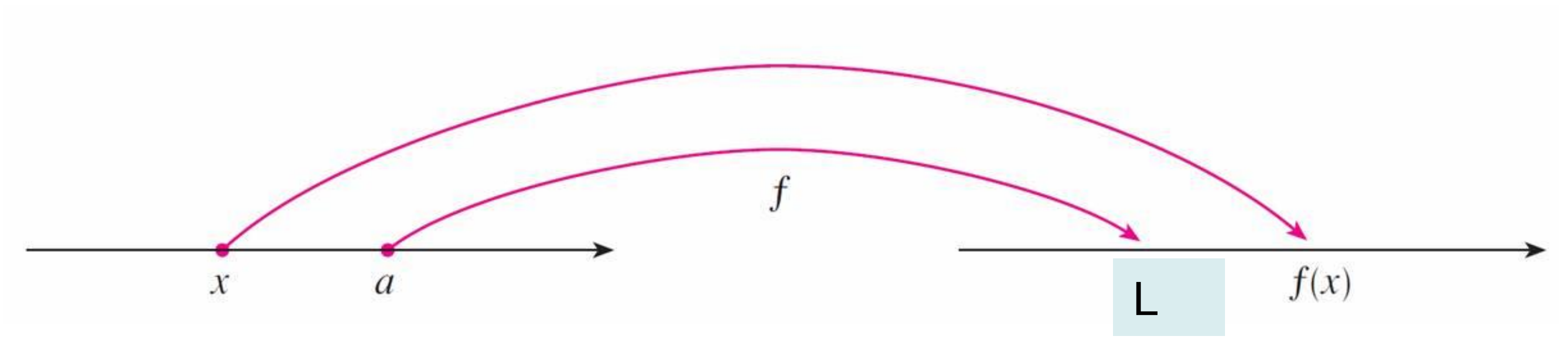
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

表示對任意正數 $\varepsilon > 0$ ，我們可以挑選 $\delta > 0$ 夠小，使得

若 x 落在 $(a - \delta, a + \delta)$ 上且 $x \neq a$ ，
則 $f(x)$ 會落在區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 上。

極限的精確定義

我們準備以圖形來刻畫這個誤差內的對應：只要 x 在 a 附近的範圍，經過 f 對應後，也會落在 L 的附近。



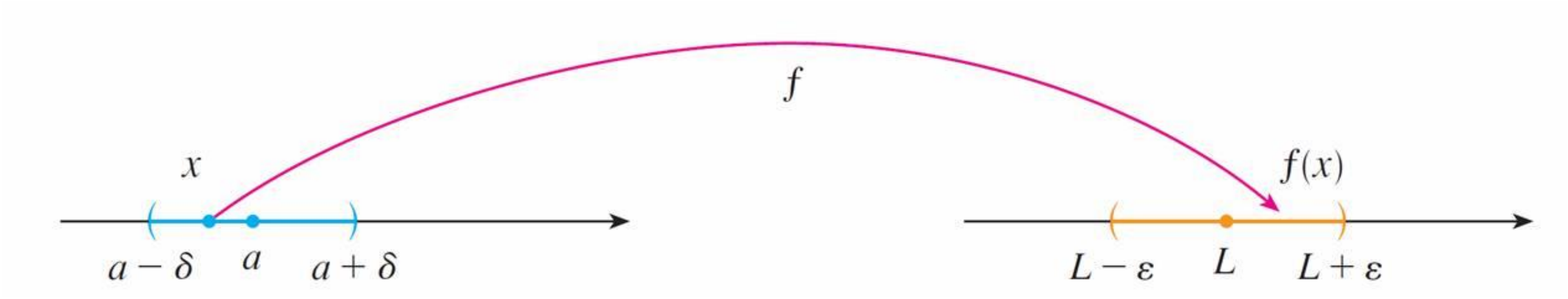
圖二

極限的精確定義

從極限的定義告訴我們，給定一個 L 附近的誤差範圍內區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ，則可以找到一個 a 附近的區間 $(a - \delta, a + \delta)$ 使得：

f 會把 $(a - \delta, a + \delta)$ 上除了 a 以外的點，

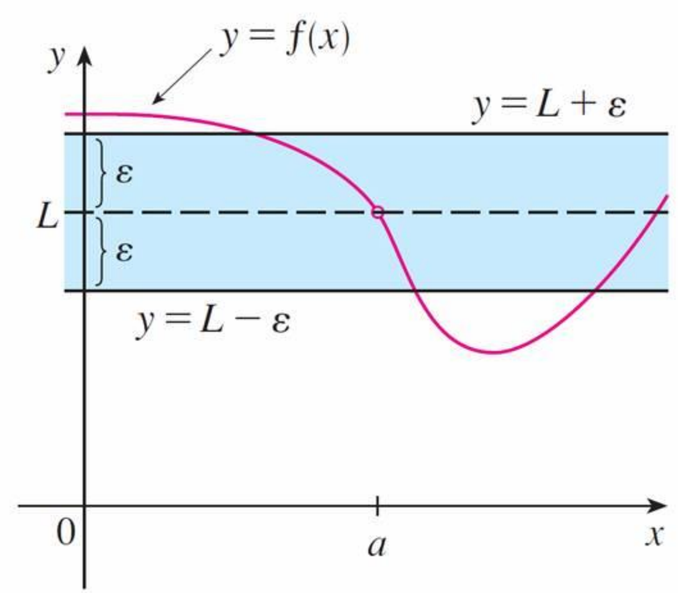
都打入區間 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 之內。



圖三

極限的精確定義

另一種圖形的刻畫是從函數圖形來看，我們可以在 y 軸上 L 附近確定 ε 的誤差範圍：也就是水平線 $y = L + \varepsilon$ 與 $y = L - \varepsilon$ 之內。

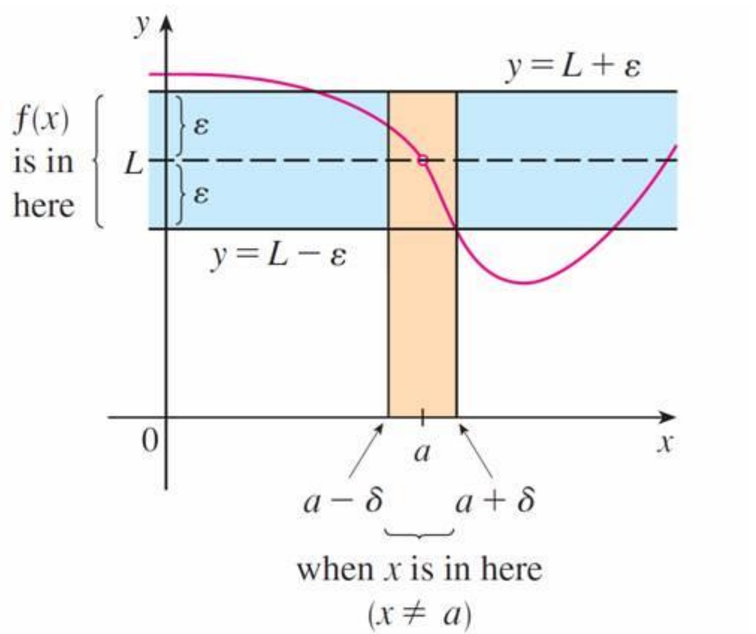


圖四

極限的精確定義

若 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 從極限定義可知，存在 $\delta > 0$ 使得我們可以將 x 限制在 $(a - \delta, a + \delta)$ 上且 $x \neq a$ ，則此時 $y = f(x)$ 的函數圖形會落在 $y = L - \varepsilon$, $y = L + \varepsilon$ 兩條直線的誤差範圍之間，如下圖。

另外我們可以觀察到，只要有一個 δ 滿足這個誤差估計，納所有比 δ 還小的正數都會滿足。

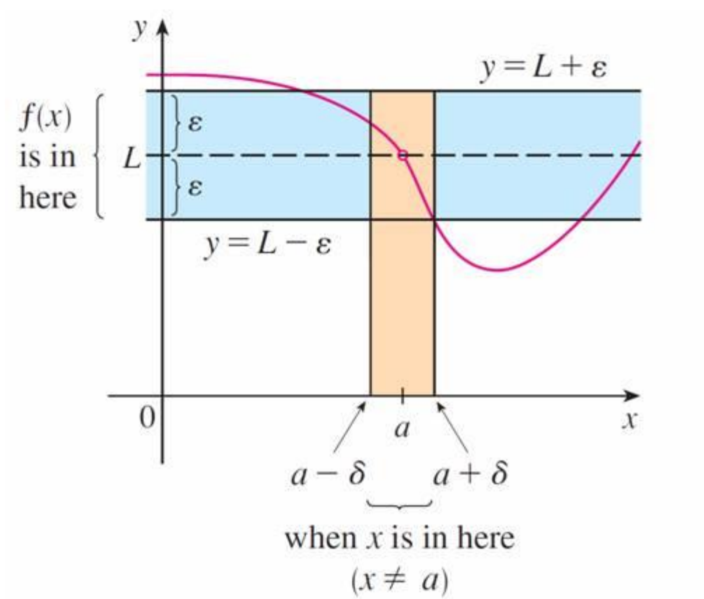


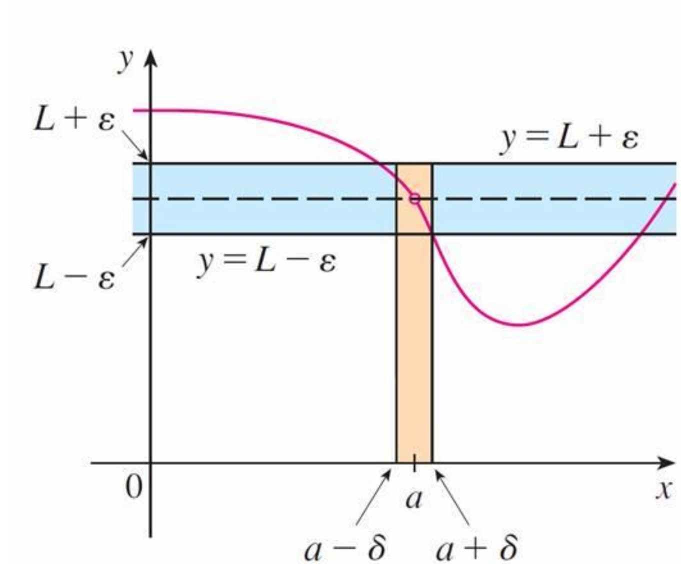
圖五

極限的精確定義

在極限的定義是要求我們對所有的誤差都要能有同樣的估計。

因此如下圖六，假使我們挑選更小的 ε ，則我們可能需要比原先更小的 δ 才能滿足定義。





圖六

範例一

利用函數圖形，求 δ 滿足

若 $0 < |x - 1| < \delta$ 則 $|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$

換言之，就是在極限的定義中，我們希望找到一數 δ 能夠使得：

在 x = 1 附近 δ 範圍內，

保證 f(x) 的值會在 L = 2 誤差範圍 $\varepsilon = 0.2$ 之內。

範例一 / 解

我們以下圖解，考慮在 (1, 2) 附近的範圍。

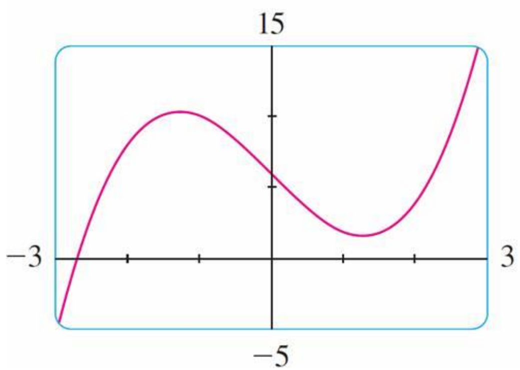


Figure 7

我們想滿足下列的不等式

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

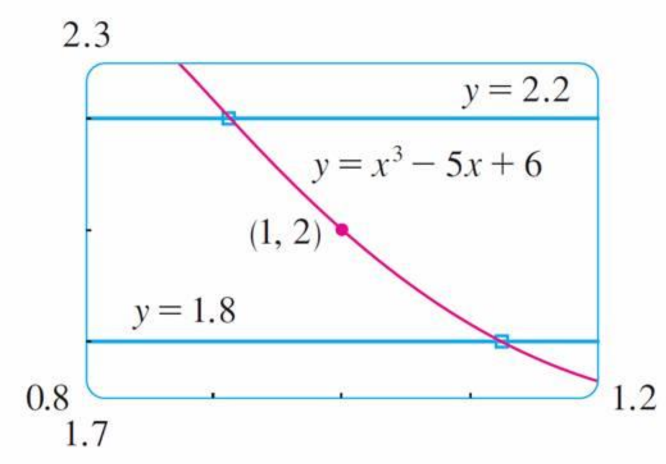
也就是 $$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

範例一 / 解

cont'd

決定好誤差範圍 0.2 以後，我們便是希望可以挑一個範圍使得曲線 $y = x^3 – 5x + 6$ 的圖形落在兩條直線 $y = 1.8$, $y = 2.2$ 之間。

我們截出函數圖形如下圖：



圖八

範例一 / 解

cont'd

我們觀察圖形，可以大概估計直線 $y = 2.2$ 與曲線 $y = x^3 - 5x + 6$ 圖形的交點大約在 x = 0.911 的地方。

同樣， $y = x^3 - 5x + 6$ 與直線 $y = 1.8$ 相交在大約 $x \approx 1.124$ 的地方。因此我們稍稍把範圍縮小，有以下的估計：

若 $0.92 < x < 1.12$ 則有 $1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$

注意到 (0.92, 1.12) 其實並沒有對 $x = 1$ 對稱，左、右端點到 x = 1 的距離分別為 1 – 0.92 = 0.08 及 1.12 – 1 = 0.12。我們取小的範圍，令 $\delta = 0.08$ 。

範例一 / 解

cont'd

以距離的不等式寫下新的估計：

若　$|x - 1| < 0.08$　則　$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$

也就是說，只要 x 到 1 的距離能夠控制在 0.08 以內，那麼 f(x) 的值跟 2 的誤差就會在 0.2 以內。

雖然我們取了 $\delta = 0.08$ ，然而事實上取任意更小的值，誤差的估計式仍會成立。

範例二

證明：$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7.$

解:

1. 首先我們的目標是，要對誤差 ε 做一個估計，然後猜出一個可能的 δ ：

   給定任意正數 ε ，想找出 δ 滿足下列估計

   若 $0 < |x - 3| < \delta$ 則 $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$

   此時我們可以改寫誤差：

   $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$ 。

範例二 / 解

cont'd

希望有 δ 滿足：

若 $0 < |x - 3| < \delta$　則　$4|x - 3| < \varepsilon$

也就是：

若 $0 < |x - 3| < \delta$　則　$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$

這告訴我們最好挑選 $\delta = \varepsilon/4$ 。

範例二 / 解

cont'd

2. 猜出 δ 範圍以後，我們便要開始證明這樣的估計符合極限的定義。

任給定 $\varepsilon > 0$ ，我們可挑選 $\delta = \varepsilon/4$ ，此時有：

若 $0 < |x - 3| < \delta$ ，

則 $|(4x - 5) - 7| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\dfrac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$

因此最後可得：

$$\text{若 } 0 < |x - 3| < \delta \text{ 則 } |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

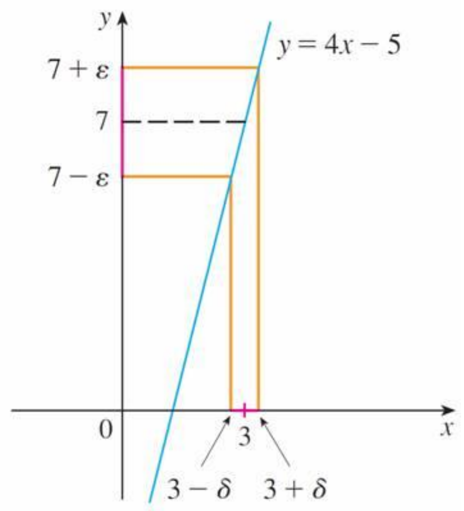
範例二 / 解

cont'd

由極限的定義，我們可知：

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

我們刻畫這個極限如下圖：



圖九

極限的精確定義

而對於單邊極限我們也可以做同樣的精確定義：

[定義]

假設 f(x) 在比 a 小的附近開區間範圍(但可能不包括 a)都有定義，我們說 f(x) 在 x 從左側趨近 a 時的極限值為 L ，表示：

給定任意正數 ε ，存在正數 δ 使得，當 $a - \delta < x < a$ 時時，誤差 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 。

符號寫作 $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ 。

極限的精確定義

右極限則是從另一個方向逼近：

[定義]

假設 f(x) 在比 a 小的附近開區間範圍(但可能不包括 a)都有定義，我們說 f(x) 在 x 從左側趨近 a 時的極限值為 L ，表示：

給定任意正數 ε ，存在正數 δ 使得，當 $a < x < a + \delta$ 時，誤差 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 。

符號寫作 $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ 。

範例三

試以單邊極限的定義證明： $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$

證明:

1.首先我們仍是要做誤差的估計，來猜出一個適合的 δ 值。先假設給定一個正數 ε ，要在 x = 0 的附近，估計 f(x) 到 L = 0 之間的誤差，並取 δ 滿足

若 $0 < x < \delta$ 則 $\sqrt{x}$ – 0 | < ε

也就是，

若 $0 < x < \delta$ 則 $\sqrt{x}$ < ε

為了方便，我們取平方，最後希望得到： $x < \varepsilon^2$

這個時候我們便知道可以取 $\delta = \varepsilon^2$ 。

範例三 / 解

cont'd

2. 接著我們證明這樣 δ 的取法滿足定義的需要：
給定任意正數 $\varepsilon > 0$，我們取 $\delta = \varepsilon^2$，此時有
若 $0 < x < \delta$ 則 $\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$

因此有

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$ 。

根據定義我們便有：

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

極限的精確定義

利用極限的精確定義，我們同樣可以證明極限的四則運算，例如加法：

若 $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$ 均存在，則此時有

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

無窮大值的極限

無窮大值的極限

趨近正、負無窮大值的極限，我們有同樣類似的精確定義：

[定義]

假設 f(x) 在 a 附近開區間範圍(但可能不包括 a)都有定義，我們說 f(x) 在 x 趨近 a 時，值趨近無窮大，表示：

給定任意正數 M ，存在正數 δ 使得當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，有

$$f(x) > M$$

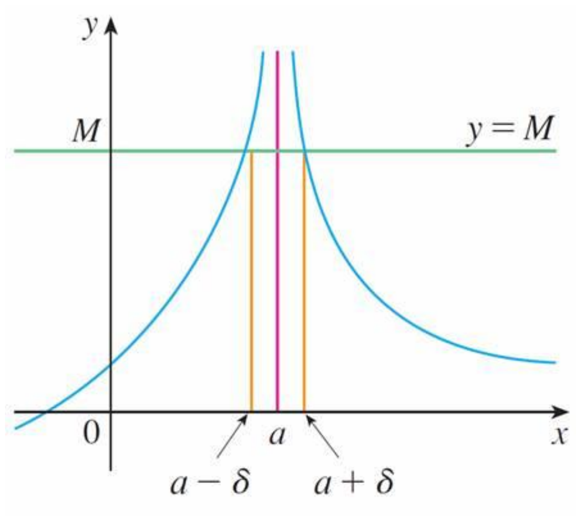
符號寫作 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

無窮大值的極限

我們希望 f(x) 可以任意地大，只要取 x 夠靠近 a 。

換句話說，給定任意大的數字 M ，我們需要取一個範圍 δ 使得 x 跟 a 的距離在 δ 內而 $x \neq a$ 時，可以保證 $f(x) > M$ 。

我們用函數圖形刻劃如下：



圖十

無窮大值的極限

觀察前述的圖形，取任意高度的水平線 $y = M$ ，我們需要做的是找到一個 $\delta > 0$ 使得若 x 落在 $(a - \delta, a + \delta)$ 上且 $x \neq a$ 之時，可以保證曲線 $y = f(x)$ 在 $y = M$ 的上方。

同樣的，若有一個 δ 滿足估計，則任意比 δ 小的正數也會滿足。

而若我們要求更大的 M ，直觀上我們就會需要更小的 δ 來達成這個要求。

範例五

利用定義證明：$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$

解:

給定 M 為任意正數，我們需要取得 δ 使得

若 $0<|x|<\delta$，則 $1/x^2>M$

經過移項我們可知道：

$$\frac{1}{x^2}>M \iff x^2<\frac{1}{M} \iff |x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$$

因此我們可以取 $\delta = 1/\sqrt{M}$，此時 $0<|x|<\delta = 1/\sqrt{M}$，則可以推得 $1/x^2>M$。最後便得證 $1/x^2 \to \infty$ 當 $x\to 0$。

無窮大值的極限

最後，我們也同樣列舉趨近負無窮大值的精確定義如下：

[定義]

假設 f(x) 在 a 附近開區間範圍(但可能不包括 a)都有定義，我們說 f(x) 在 x 趨近 a 時，函數值趨近負無窮大，表示：

給定任意正數 M ，存在正數 δ 使得當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，有

$$f(x) < -M$$

符號寫作 $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$